ANNEE 1984

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

PREMIERE EPREUVE A OPTION

MATHEMATIQUES

M - P

(Durée : 3 h 00 - Coefficient : 9)

=:=:=:=:=:=:=

Ce sujet est réservé aux candidats ayant choisi l'option M ou P lors du dépôt de candidature.

Le changement d'option n'est pas autorisé.

PARTIE I

On définit une suite Π_n de polynômes par :

$$\begin{cases} \Pi_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \Pi_n(X) = \dfrac{X\,(X-1)\ldots(X-n+1)}{n\,!} \end{cases}$$

1) Montrer que la famille $\Pi_n(X)$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

2)

a) En calculant de deux manières le coefficient de $X^{n_1+n_2}$ dans $(1+X)^{m'}\,(1+X)^{m''}$, montrer que, quels que soient $(m', m'') \in \mathbb{N}^2$

$$\sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ 0\le n_1 \\ 0\le n_2}} C_{m'}^{n_1}.\,C_{m''}^{n_2} = C_{m'+m''}^{n}$$

b) Montrer que :

$$\sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ 0\le n_1 \\ 0\le n_2}} \Pi_{n_1}(X).\Pi_{n_2}(Y) = \Pi_n(X+Y)\ .$$

3) On définit l'application Δ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même par :

$(\Delta P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et préciser le noyau de Δ.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta(\Pi_n) = \Pi_{n-1}$

c) Montrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$Q(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n Q(0).\,\Pi_n(X)$$

PARTIE II

A toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, on associe la fonction Δf définie par : $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

1) Montrer que Δ est une application linéaire de l'espace vectoriel E des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, dans lui-même.

2) Préciser $\mathrm{Ker}(\Delta)$.

3) On pose $\Delta^0 = \mathrm{Id}$, et $\Delta^{n+1} = \Delta \circ \Delta^n$ $(n \in \mathbb{N})$; si f est une fonction, $\Delta^n f(x)$ désignera $\left[\Delta^n(f)\right](x)$.

Soit une fonction f et un entier $p \in \mathbb{N}$, on définit alors le polynôme :

$$Q_p(X) = \sum_{n=0}^{p} \Delta^n f(0) . \Pi_n(X).$$

Déterminer le degré du polynôme $Q_p(X)$;

comparer $Q_p(h)$ et $f(h)$ pour $h \in \{0,1,\ldots,p\}$.

4) On suppose f de classe C^{p+1} sur $[0,p]$.

Soit ϕ_β la fonction définie sur $[0,p]$ par :

$\phi_\beta(t) = f(t) - Q_p(t) - \beta \Pi_{p+1}(t)$ où $\beta \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que ϕ_β est de classe C^{p+1} et que ϕ_β s'annule en $0,1,\ldots,p$.

b) Soit $x \in [0,p]$ non entier.

Montrer qu'il existe β unique tel que $\phi_\beta(x) = 0$; en déduire qu'il existe $c \in]0,p[$ tel que $\phi_\beta^{(p+1)}(c) = 0$.

c) En déduire que :

$$\sup_{x \in [0,p]} \left| f(x) - Q_p(x) \right| \leq \sup_{t \in [0,p]} \left| f^{(p+1)}(t) \right| . \sup_{t \in [0,p]} \left| \Pi_{p+1}(t) \right|$$

d) Montrer que $\forall t \in [0,p], \left| \Pi_{p+1}(t) \right| \leq 1$.

En déduire que $\sup_{x \in [0,p]} \left| f(x) - Q_p(x) \right| \leq \sup_{t \in [0,p]} \left| f^{(p+1)}(t) \right|$.

5) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$; montrer que, quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme Q_p tel que $\left| f(x_0) - Q_p(x_0) \right| < \varepsilon$.

PARTIE III

On s'intéresse maintenant aux fonctions f bornées sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que, si $\Delta^2 f = 0$, alors f est périodique de période 1.

2) Montrer que, si $\Delta^n f = 0$, alors f est périodique de période 1.

3) Montrer, par un exemple, que si on retire la condition "f bornée sur $\mathbb{R}$" la réponse du 1) n'est plus vraie.